

# Különböző felszíni közlekedési hálózatok forgalmának együttes modellezése és komplex analízise

A szerzők a járműforgalmi hálózati modellfejlesztésekre támaszkodva, egzakt hálózati matematikai modellt vizsgálnak a hálózatok uniója alapján. A kiindulási hálózat az a járműforgalmi hálózat, amely magába integrálja a közösségi közlekedés hálózatát is. A munkában először a közúti és a gyalogos hálózat unióját hozták létre, majd a módszert tovább általánosították.

**Dr. Péter Tamás\* - Dr. Csiszár Csaba\*\* - Dr. Mándoki Péter\*\***

\*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Közlekedés- és Járműirányítási Tanszék

\*\* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Közlekedésüzemi és Közlekedésgazdasági Tanszék  
e-mail: peter.tamas@mail.bme.hu, csiszar.csaba@mail.bme.hu, mandoki@kku.bme.hu

## 1. BEVEZETÉS

Általában gyakori, hogy egy utas, az utazása során komplex trajektórián halad végig. Ez akkor lép fel, amikor az útvonalát többféle forgalmi hálózat rész trajektóriái alkotják. Pl. egy városi forgalomban az igényeinek legjobban megfelelő módon, szabadon váltakoznak az általa alkalmazott kerékpáros, gyalogos, kötött-pályás és közúti járműforgalmi trajektóriák. Természetesen, ez nem csak a városi közlekedésre jellemző! Minden összetett utazás komplex trajektórián történik, amelynél a fentiekén kívül, felléphet a vízi és légiforgalmi közlekedés is.

A komplex trajektória megválasztása mindig egy feltételes optimum probléma különböző minőségű megoldása, ami a lehetőségeknek, az utazók céljainak és félelmeinek figyelembevételével történik. A vegyes trajektóriáknak, az optimális célba érések modellezése mellett, fontos a szerepük a komplex forgalmi hálózatok terhelés- és megbízhatóság analízisének is.

A különböző dinamikus hálózati forgalmi rendszerek egymással párhuzamosan működ-

nek, elsősorban a saját törvényszerűségeiket és irányításukat követve. Ugyanakkor (a külső környezeti, meteorológiai hatásokon kívül), ezeknek a rendszereknek az állapotjellemzői kölcsönösen hatást gyakorolnak a másik forgalmi rendszerre, mivel befolyásolhatják egymás forgalmi folyamatait is. Mindez involválja (magával hozza, maga után vonja) a különböző dinamikus hálózati forgalmi rendszerek uniójának időszerűségét és szükségszerű vizsgálatát.

Az általunk vizsgált dinamikus hálózatnak és annak bármely trajektóriájának két alapvető jellemzője van: a térkép gráf (geometriai jellemző) és az áramló „anyag” fajtája (dinamikus jellemző). Ha két gráf vagy valamely rész-gráfjaik azonosak, de eltérő az ezeken áramló „anyag” fajtája, akkor ezeket különböző és diszjunkt dinamikus hálózatoknak tekintjük, Pl. gyalogos-kerékpáros úton közösen haladhatnak; vagy hasonlóan a közforgalmú közlekedési sávon a villamosok és az autóbuszok együtt haladnak (pl. Budapest, belső Bartók Béla út). Tehát, minden különböző típusú dinamikus modell saját anyagáramot ír le. Ha más anyagáram is jelen van, akár a szakaszo-

kon, akár keresztező mozgásként, akkor ezek állapotjellemzőit a modell befolyásoló, akadályozó, ill. átadást tiltó függvényei veszik figyelembe.

Az egyesített hálózati gráfot különböző közlekedési módok/eszközök esetén vizsgáljuk, de újdonsága miatt, kiemelten érdekes a megközelítés a gyalogos forgalom szempontjából! A gyalogos forgalmi gráfot a járműforgalmi hálózati modellfejlesztéseinknek megfelelően szintén szektorokra bontjuk, amelyen további beosztási pontokat hoznak létre a közösségi viszonylatok utasforgalmi létesítményei és a gépjárműhálózattal történő metszési pontok, ill. taxi és shared mobility (car-sharing, bike-sharing) állomások.

A közúti és a közösségi közlekedési hálózat használata a nagyméretű makroszkopikus modell működése, ill. törvényszerűsége szerinti történik. A gyalogos közlekedés ezt "futószalagszerűen" használja, az egyesített modellben.

A járműforgalmi hálózati modell egyrészt bizonyos mértékig autonóm, dinamikus, makroszkopikus rendszer a nagy hálózatban, a rá érvényes saját sebesség-sűrűség, irányítási, stb. törvények alapján. Ugyanakkor a gyalogos rendszerrel történő integrálása a működésében új dinamikák és feltételek belépését is eredményezi. Pl. csúcs időszakokban megváltozik a közösségi közlekedés járműveinek megállókban eltöltött időtartama és a járművek dinamikája.

A gyalogos közlekedési hálózati modell több speciális tulajdonsággal is rendelkezik. A gyalogosoknál, a saját útvonalukon történő haladásuknál viszonylag ritkán érvényesülnek a sebesség-sűrűség függvények törvényszerűségei, de torlódási pontoknál ezt is figyelembe kell venni. Általános esetben, sebességük inkább átlagokkal írható le, ill. valószínűségi változóknak tekinthető.

A kifejlesztett hálózati modell alapján meghatározhatók az optimális útvonalak, trajektóriák. Ez átvihető a most tárgyalt komplex hálózati modellre is.

## 2. A JÁRMŰFORGALMI HÁLÓZATI MODELLFEJLESZTÉSEINKNÉL ALKALMAZOTT MÓDSZER

A hagyományos módszeren alapuló forgalmi szimulációk: I. utazás-felvételi vagy II. klaszszikus forgalomszámlálási módszerekből indulnak ki.

I. Ekkor legtöbbször forgalomkeltés, forgalomszétosztás és forgalommegosztás esetéről beszélhetünk, amelyet honnan-hová mátrixok formájában is ki tudunk fejezni. Ez a felmérés/előrebecslési módszer alapos körületekintést igényel, hiszen reprezentatívnak kell lenni, ugyanakkor a reprezentativitásnak megfelelő számú felmérés elvégzése rendkívül költséges lehet, ezért általában csak valamilyen előre meghatározott szisztéma szerint elvégzett mintavételezésről beszélhetünk. A városi körzetek modellezése során számos modellt ismerünk (Lill-féle utazástörvény, Stouffer-féle hipotézis, Detroit módszer, Fratar módszer, Furness módszer, Voorhees modell, Alkalommodell /Intervening Opportunities Model/, Versengő lehetőségek modellje /Competing Opportunities Model/. Többszörös regressziós modell, Utazási költség-modell, Elektrosztatikus modell, egyéb szintetikus modellek), amelyek nehezen vagy egyáltalán nem mérhető növekedési tényezőkkel, ezért indexekkel, empirikus kitevőkkel stb. operálnak. A modellezés bemenő paraméterei tehát sok esetben csak mértékadónak tekinthetők, így a szimuláció produktuma is csak az ennek megfelelő szignifikanciával vehető figyelembe.

II. A második típusú modellek csomóponti, illetve keresztmetszeti forgalomszámlálásokon alapulnak, amelyek jól definiált, ügyi szabványban is rögzített módszereket alkalmaznak és a közlekedés tervezése során általánosan elfogadottnak tekinthetők. A forgalom számítása járműfajták szerint történik, amelyeket egységjárműben kifejezve szorzótényezőkkel súlyoznak. A forgalomszámlálás különböző napszakokban, szezonálisan végzendő, és eredményeként napi gépjárműforgalom, mértékadó óraforgalom (MOF), nappali és éjszakai forgalom számítható. Az ilyen jellegű forgalomszámlálásokkal operáló szimulációs szoft-

verek előnye, hogy az elfogadható biztonsággal megállapított bemeneti értékekhez a szakma számára jól értelmezhető, megfelelő minőségű eredmények párosulhatnak. A forgalom-számlálásokat alkalmazó rendszerek hátránya ugyanakkor az, hogy a forgalomnagyság, az átlagsebesség és a járműsűrűség közötti összefüggések nem adnak egyértelmű hozzárendelést; így pl. egy adott forgalomnagysághoz több átlagsebesség érték is tartozik. A rendszer tehát határozatlanságokat hordoz, ami abból adódik, hogy a hagyományos keresztszámítási vagy csomóponti forgalomszámlálás módja információvesztéssel jár.

## 2.1. Motivációk

A kifejlesztett új megközelítést több olyan alapkérdés motiválta, amelyeket a jelenlegi modellezési technikákban elhanyagolnak, viszont a gazdaságilag jelentős problémákra választ kereső nagyméretű ITS - hálózati modellek alkalmazásakor már nem hanyagolhatunk el és nem kerülhetünk meg. Ez a motiváció fontos a kutatás szempontjából, mert új irányt szab a közlekedés, mint kiemelt iparágakhoz kapcsolódó célzott alapkutatások folytatása területén.

Rá kell mutatnunk arra, hogy a hagyományos modellezési szemlélet alkalmazása sok megválaszolatlan kérdést vet fel és állandóan méretproblémákkal küzd. Természetesen, maga a feladat is összetett: a közlekedési hálózat rendkívül bonyolult, belső automatizmusok, külső környezeti kölcsönhatások, humán tényezők, sokféle szabály, geometriai, adat, szezonális, stb. jellemzi. Minden részhálózat más, sokféle az egyedi szabály, ennek kapcsán, bármely részhálózatot önmagában vizsgálva, csak egy nagyon kis rész az egészből és minden esetben csak a nagy hálózathoz képest kivett példa lehet! A modellezéskor az egyik legnagyobb kihívást a különböző helyváltoztatási módok egymáshoz illesztése, a mód- és eszközváltási pontok folyamatainak leképezése jelenti. A modellezés során a valóság (objektumok és a fizikai folyamatok jellemzőinek) leképezése egyre pontosabbá válhat a rendelkezésre álló korszerű adatgyűjtési/tárolási technikák alkalmazásának következtében. A részletesebb modellek valósághűbb eredményeket szolgáltatnak.

Ezen a területen a hagyományos modellezési technikában eddig fel nem vetett kérdés, hogy lehet-e ezekből - a példákban - következtetni az egészre, a teljesre? Ha megoldjuk egy résznek az optimalizálását, nincs válasz arra, hogy mi van a komplementterrel, nem tudjuk, hogy nem toljuk-e át oda a problémát? Ha csupán szoftveresen algoritmizált modelleket alkalmazunk, ezek nem alkalmasak arra, hogy szélesebb körű egzakt matematikai következtetéseket, ill. eredményeket adjanak! A nagyméretű globális hálózat nem állandó anyagáramú tiszta Euler hálózat, amely további új irányt szab a kutatásoknak. Hagyományos modellekkel probléma a parkolók szerepe is a modellekben (Sándor, Zs. and Csiszár, Cs., 2015), mivel más típusú szereplők, mint az útszakaszok, ún. idegen, 'tároló tulajdonságú' elemek.

A közlekedési folyamatok komplexitása magas szintű automatizáltságot és intelligens közlekedési rendszerek (ITS) alkalmazását követeli meg, amelynek közös alapjai a közlekedési modellek (T. Vadvári and P. Várlaki, 2015). Számos közismert modell létezik. Természetesen minden modellnek vannak előnyei és hátrányai a performancia, adatigény és pontosság tekintetében. Az új járműforgalmi hálózati modellünk makroszkopikus és térkép-gráf invariáns, speciális hipermátrix struktúrával írható le (Péter, T., 2012). A modell fő erőssége a rendkívül bonyolult hálózat uniformizálása és a számítási gyorsaság. Ennek köszönhetően a hálózatok valós idejű szabályozására alkalmazható és különösen a nagyméretű hálózatok modellezésére alkalmas.

Kutatásaink az egyes esetekben külön-külön is vizsgálják a közlekedési folyamatokat a trajektóriák mentén (T. Péter, and M. Basset, 2009) és a tartományokon is (pl. a környezeti kihívásokat mindkét esetben). A forgalmas utak mentén fellépő környezetterhelésre gyorsított számítási-előrejelzési módszereket dolgoztunk ki, és vizsgáljuk az ehhez is kapcsolható ITS irányítást, amelynek IDM csoportok optimális átvezetésének hatékonyságát elemezzük (O. Derbel, T. Péter, H. Zebiri, B. Mourllion and M. Basset, 2012) és (Derbel, Péter, Zebiri, Mourllion and Basset, 2013). A környezetterhelés optimalizálása Lyapunov-függ-

vény alkalmazásával tartományszinten történik. Ez utóbbinál megvalósítható automatikus irányítás elvezet a kooperatív ökoszisztémát ötvöző, integrált közlekedés- és szállításirányításhoz.

A torlódásokkal kapcsolatos problémák megoldására, gyakran hasznos figyelembe venni az aszimmetrikus forgalmi terhelések fellépést is, amikor a kapacitásnövelés állapotfüggő optimális irányítással valósítható meg. Ezt is figyelembe vesszük a kutatásainkban, különböző területeken MPC elvet alkalmazva, pl. a változtatható irányú sávok működtetésével (Peter, T. Fülep, T. and Bede, Zs., 2011).

## 2.2. Az alkalmazott új modellparadigmák

**P1. A közúti járművek forgalmi folyamatát egy új pulzáló irányított gráf határozza meg.** Az úthálózattérképen látható útsávokat szektorokra bontjuk. A teljes úthálózaton létrejövő közlekedési folyamat, a szektorok, mint hálózati elemek sokasága között fellépő dinamikus kooperációk eredménye. A főszereplők a kooperáló szektorok és ők az új gráf csúcsai! Ezek a csúcsok egyúttal állapotjellemzőkkel, dinamikus járműsűrűségekkel is rendelkeznek. A csúcsok közötti élek szintén dinamikusak. Ezek egyszerre szabályozzák az anyagátadás, járműátadás sebességét és mennyiségét is. A dinamikus éleknél az anyagáram-sebesség a kooperáló csúcsok állapotaitól, az azokat körülvevő (segítő/akadályozó) környezettől és időtől is függnek. A dinamikus éleknél az anyagátadás mennyiségét környezettől és időtől függő disztribúciók szabályozzák.

**P2. A járműsűrűség állapotjellemző definiálására a szektorok térbeli lefedettségét használjuk,** ez matematikailag egzakt fogalom és bármilyen hosszúságú szektor esetében  $[0,1]$  intervallumban helyezkedik el. A definíció kiterjeszthető bármilyen alakú parkolóra. Ennek eredményeként a parkolók, mint általánosított szektorok vesznek részt a járműforgalmi folyamatok egységes dinamikus modelljében. Ezek ugyanolyan állapotjellemzővel és anyagátadás-kooperációval bíró dinamikus elemek, mint a hagyományos szektorok. Nagyon fon-

tos következmény: **a bonyolult, nagyméretű közúti hálózatok egységes dinamikus modelljét sikerült egyféle elemek sokaságából felépíteni!**

**P3. A vizsgált tartományban elhelyezkedő valós közlekedési hálózati rendszert egy virtuális zárt görbével határoljuk körül.** (A tartomány nem feltétlenül egyszeresen összefüggő). A virtuális zárt görbe megnevezés a modellezés fontos tulajdonságát emeli ki! Ily módon, a körülhatárolás következtében nem szűnik meg az a dinamikus kapcsolatrendszer, amely a külső és belső hálózatok között, a vizsgálatunktól függetlenül létezik. A modellben ez azt jelenti, hogy az input szektorok és belső szektorok között, valamint az output szektorok és belső szektorok között ugyanazon típusú dinamikus átadási kapcsolatok valósulnak meg, mint a belső-belső vagy külső-külső szektorok között.

Tehát, az ún. „kapuknál” nem forgalom megadása történik, mint a hagyományos modelleknél.

**P4. A belső és külső hálózat szektorai között négyféle kapcsolat van. A teljes hálózat esetében alapvető fontossággal bír a hálózatot definiáló kapcsolati hipermatrix.** A teljes (belső és külső) hálózat dinamikus működését a kapcsolati hipermatrix foglalja egy rendszerbe. A kapcsolati hipermatrix megadja bármely szektor esetében, hogy milyen más szektorokkal áll és milyen dinamikus átadási kapcsolatban. A kapcsolati hipermatrixot tartalmazó differenciálegyenlet-rendszer írja le a hálózat minden szektorának a működését, azaz a teljes hálózat működését (Peter, T. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science (AMCS), 2012).

**P5. A belső és külső hálózat járműforgalmi folyamatait egyszerre leíró univerzális hálózati modellt írunk fel. Módszerünk lényege, hogy egyszerre vizsgáljuk egy tetszőleges belső hálózati szektor összes dinamikus átadási kapcsolatát és egy tetszőleges külső hálózati szektor összes dinamikus átadási kapcsolatát.** Az univerzális hálózati modell nemlineáris pozitív differenciálegyenlet-rendszer.

**P6. Globális hálózati modellhez jutottunk el** oly módon, hogy az univerzális hálózati modell belső hálózatát tartalmazó tartományát addig növeljük, amíg a külső tartomány üres halmazzá nem válik. Ezzel ekvivalens, ha a külső hálózatot tartalmazó tartományt addig növeljük, amíg a belső tartomány üres halmazzá nem válik.

**P7. A szűkített hálózati modell esetében,** a belső hálózati tartományban "n" db  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sűrűségű állapotjellemzővel rendelkező szektor van. A külső tartomány, azt az "m" db  $s_1, s_2, \dots, s_m$ , mért sűrűséggel rendelkező szektort foglalja magában, amelyeknek közvetlen input vagy output átadási kapcsolata van valamely belső szektorral. Ez utóbbi modellt alkalmazzuk pl. valós idejű modellezésre és irányításra. Az **univerzális és globális modellek** általános rendszerelméleti tulajdonságok vizsgálatára és megismerésére szolgálnak.

## 2.3. Az univerzális járműforgalmi hálózat matematikai modellje

Makroszkopikus modellünk, (amely a nagyméretű közúti hálózatokon a közlekedési folyamatokat írja le) a pozitív nemlineáris rendszerek osztályába tartozik. A modell alkalmas nagyméretű közúti közlekedési hálózatok szimulációs tesztjére, tervezésére és a forgalmi rendszerek szabályozására (Peter, T. Bokor, J. and Strobl, A., 2013).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle L \rangle^{-1} \\ \langle P \rangle^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ahol:

$x \in \mathbb{R}^n$  a belső szektorok állapotjellemző vektora,  $s \in \mathbb{R}^m$  a külső szektorok állapotjellemző vektora,  $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$  a belső szektorok állapotjellemző vektorának idő szerinti deriváltja,  $\dot{s} \in \mathbb{R}^m$  a külső szektorok állapotjellemző vektorának idő szerinti deriváltja,  $\langle L \rangle$  a belső szektorok és  $\langle P \rangle$  a külső szektorok hosszát tartalmazó diagonális mátrixok:

$$\langle L \rangle = \langle l_1, l_2, \dots, l_n \rangle, \langle P \rangle = \langle p_1, p_2, \dots, p_m \rangle,$$

A K kapcsolati hipermatrix részmatrixai:

$$K_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}, K_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}, K_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}, K_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ és } x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^m.$$

Továbbá ezekben a mátrixokban a  $k_{ij}$  kapcsolati függvények alkalmazásával vesszük figyelembe az  $\alpha_{ij}$  disztribúciót, a  $\beta_{ij}$  kapcsolatot akadályozó, vagy segítő tényezőt, a kapcsolat  $\gamma_{ij}$  intenzitását és a kapcsolatot engedélyező, vagy megszüntető  $u_{ij}(t)$  forgalomirányítási lámpajelet, ahol  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  és  $u_{ij}(t)$  dimenzió nélküli értékek.

A  $k_{ij}$  elvben az alábbi négy tényező szorzata:

$$k_{ij} = \alpha_{ij} \beta_{ij} \gamma_{ij} u_{ij}(t)$$

oly módon, hogy ha a  $(j \rightarrow i)$  kapcsolatnál valamelyik tényező nem játszik szerepet (pl. nincs lámpa, nincs szétosztás, stb.) akkor ott ez a tényező értelemszerűen azonosan egyenlő 1-gyel.

Az alkalmazott modelltől függ, hogy  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  konstansok, vagy időtől függő, állapottól függő, ill. időtől és állapottól függő függvények.

Az S és E a  $(j \rightarrow i)$  kapcsolatnál fellépő belső tiltó automatizmus függvények (szintén dimenzió nélküli értékek),  $V_{ij}$  átadási sebesség, amely t időpillanatban a csatlakozó szakaszok állapotától és az i, j szakasznál rendre  $e_i$  és  $e_j$  környezeti paramétervektoroktól függ.

$V_{ij} = V_{ij}(x_i(t), x_j(t), e_i, e_j)$  és  $V_{ij}$  dimenziója [m/s]. Ez alapján, a  $K_{11}$  kapcsolati mátrix elemei szintén [m/s] dimenziójú sebességek:

$$v_{ij} = k_{ij} S(x_i(t)) V_{ij}(x_i(t), x_j(t), e_i, e_j) E(x_j(t))$$

Néhány kissé részletesebb, a kooperálással és a modellel kapcsolatos további megjegyzés.

A fenti, tömör módon felírt összefüggésnél a  $k_{ij}$  jelentése sokféle:

Lehet külön-külön  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $u_{ij}(t)$ , vagy ha pl. egyszerre van jelen elosztás és zavarás, (vagy rásegítés) és forgalmi lámpa is, akkor az előbbieket szorzata, pl.:  $k_{ij}(t) = \alpha_{ij} \beta_{ij}$  ill.,  $k_{ij}(t) = \beta_{ij} \gamma_{ij} u_{ij}(t)$ .



Ezek az alábbi tulajdonságokkal bírnak:

- Ha a  $j$ -dik szakasz több  $i$  szakaszra dolgozik, akkor az egyes  $i$  szakaszoknál  $0 < \alpha_{ij} < 1$  disztribúciót (elosztási arányt, rátát) alkalmazunk és a hipermátrix  $j$ -oszlópában  $\sum_{(i)} \alpha_{ij} = 1$  teljesül. (Mivel  $j$  dolgozhat külső szakaszokra is.)
- Ha a kapcsolatot zavarják, pl. keresztező járművek, gyalogosok vagy baleset, akkor  $0 < \beta_{ij} < 1$  zavarási tényező értéket vesz fel.
- Ha a kapcsolatot segítik, pl. másik irányt keresztező járművek vagy rendőr, akkor  $1 < \beta_{ij}$  rásegítési tényező értéket vesz fel.
- Ha egyszerre van jelen elosztás és zavarás, (vagy rásegítés) akkor  $\alpha_{ij} \beta_{ij}$  szorzat lép fel.
- Az  $\alpha_{ij}$  és  $\beta_{ij}$  rövid időtartamra általában konstans értékek.  $\alpha_{ij}$  általános esetben időtől függő  $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(t)$ , vagy időtől és állapottól függő  $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\underline{x}(t), t)$  függvény.  $\beta_{ij}$  általános esetben szintén időtől függő  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(t)$ , vagy időtől és állapottól függ  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(\underline{x}(t), t)$ .
- A parkoló és útszakasz, valamint párhuzamos sávok kapcsolatát  $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(t)$ , intenzitás függvényekkel adjuk meg,  $0 \leq \gamma_{ij}(t)$ .
- $0 \leq u_{ij}(t) \leq 1$  kapcsolási függvény az egyes szakaszok átadásánál működő forgalmi lámpák hatását veszi figyelembe. Elméletben az értéke az 1 vagy 0 értékeket vesz fel a lámpa állapota szerint. Később a modellben a valós reakciókésedelem időt is figyelembe véve,  $t$  szerint folytonosan differenciálható lámpa függvényeket alkalmazunk.

A kapcsolati mátrix  $v_{ij}$  kapcsolati függvényénél figyelembe kell venni minden, a forgalmi rend kialakításánál meghatározott, különböző módon szabályozott kapcsolati jellemzőt pl. jelzőlámpát  $u_{ij}(t)$  függvényekkel, lámpa nélküli útszakaszok kapcsolatát, parkoló és útszakaszok kapcsolatát, párhuzamos útszakaszok kapcsolatát stb. Ezen kívül, figyelembe kell venni azt is, hogy a forgalom létrejöttékor fellépnek belső szabályozási automatizmusok is! A modell, a járműsűrűségtől függő belső szabályozásokat vesz figyelembe az  $S(x_i(t))$  és  $E(x_j(t))$  függvényekkel. A szakaszok állapotjellemzőitől, pillanatnyi kapcsolatuktól és környezeti jellemzőktől függ a  $v_{ij}$  átadási sebesség függvény. Látható tehát, hogy  $v_{ij}$ -t valóban sok tényező határozza meg.

A modellünkben  $0 \leq x_i(t) \leq 1$  normált járműsűrűség állapotjellemzőt használunk ( $i=1, \dots, n$ ). Ez alkalmazható a parkolók esetében is, mivel a már tárgyaltak szerint a parkolók is általánosított szakaszok a modellben.

Az  $S(x)$  automatikus belső önszabályozási függvény 1 vagy 0 értékeket vesz fel. A kapcsolat engedélyezett, ha egy felvevő szakasz  $x$  sűrűsége kisebb, mint 1, egyébként tiltott.

$$S(x) = \begin{cases} 0 & 1 \leq x \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$

Az  $E(x)$  automatikus belső önszabályozási függvény 1 vagy 0 értékeket vesz fel. A kapcsolat tiltott, ha egy áradó szakasz  $x$  sűrűsége kisebb vagy egyenlő, mint 0, egyébként engedélyezett.

$$E(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \end{cases}$$

Ezek biztosítják a modellben azt, hogy nem vesszünk el járművet onnan ahol nincs (sűrűség nem lép negatív tartományba), és nem adunk át oda, ahol a sűrűség már elérte az 1-et. Ez biztosítja, hogy  $\forall x_i \in [0, 1]$ .

A  $V_{ij}(x_i(t), x_j(t), e_i, e_j)$ , röviden  $V_{ij}$  a  $j$ -dik szakasról  $i$ -dik szakaszra történő áthaladás sebessége, amely a modellben figyelembe veszi a csatlakozó szakaszok sűrűségeit és az  $e_i, e_j$  környezeti paramétervektorokat.

A  $K_{11}$  és  $K_{22}$  fődiagonálisában 0 vagy negatív értékek lépnek fel, minden más elemük nemnegatív értéket vesz fel. A  $K_{12}$  és  $K_{21}$  minden eleme nemnegatív értéket vesz fel. Tehát ezek a mátrixok Metzler mátrixok, következésképpen az általuk meghatározott teljes kapcsolati rendszert leíró  $K$  kapcsolati hipermátrix is Metzler mátrix.

Fentiek alapján a makroszkopikus modellünk, a nagyméretű közúti hálózatokon a közlekedési folyamatok modellezése a pozitív nemlineáris rendszerek osztályába tartozik.

A vizsgált közúti közlekedési folyamatok többségében az állapotok eredeti fizikai jelentése

alapján megfelelnek ennek. A klasszikus irodalomban a közúti folyamatok leírása során a legtöbb esetben általános lineáris rendszer egyenleteket állítanak fel, és nem használják ki a folyamat pozitív tulajdonságait. A pozitív rendszerek irányíthatóságának és a megfigyelhetőségének a feltételei nem vezethetők le egyértelműen az általános rendszereknél megismert módszerekből. A probléma különösen igaz, ha nemcsak az állapotokra, de még a beavatkozó jelre is nem negatív értékkészletet követelünk meg. Ezért, a közúti folyamatok tisztán pozitív rendszerként történő leírása az irányítástechnikai szempontból sem triviális feladat. Az irányítási feladat ebben az esetben azt jelenti, hogy úgy kell egy állapotból egy másik állapotba irányítani a rendszert, hogy az állapotátmenet közben is érvényes, hogy nem negatív értékeket vehetnek fel az állapotok (Luenberger (1979), (Caccetta and Rumchev, 2000), (Farina, L. and Rinaldi, S. 2000)).

## 2.4. A szűkített járműforgalomi hálózat matematikai modellje

A cikkünkben, a továbbiakban szűkített hálózati modellt alkalmazunk, amely egy tetszőleges „G” zárt görbével körülhatárolt  $n$  szektorból álló belső hálózatról és  $m$  db  $s_1, s_2, \dots, s_m$ , sűrűségű külső szektorból áll. Ezek közvetlen kapcsolatokkal rendelkeznek valamely belső szektorral, és állapotaikat mérés alapján ismertnek tekintjük. E modellt alkalmazunk a szoftveres vizsgálatoknál is. A modellnél a kapcsolati hipermátrixot alkotó mátrixok közül, csak a  $K_{11}$  és  $K_{12}$  mátrixok játszanak szerepet, mert általuk képviselve van minden átadás, amely a belső szektorokra vonatkozik. (A külső-külső kapcsolatokat ekkor nem vizsgáljuk). A modell differenciálegyenlet-rendszere:

$$\dot{x} = -Lx^{-1} [K_{11}(x,s)x + K_{12}(x,s)s] \quad (2)$$

Ahol:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall x_i \in [0,1]$ ,  $(i=1,2,\dots,n)$ ,  $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \in \mathbb{R}^m$ ,  $\forall s_i \in [0,1]$ ,  $(i=1,2,\dots,m)$ ,  $L = \text{diag}\{l_1, \dots, l_n\}$ ,  $l_i$  a főátlóban a belső szakaszok hossza ( $\forall l_i > 0$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ),  $K_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

A hálózat működését a  $K_{11}$  és  $K_{12}$  kapcsolati mátrixok foglalják rendszerbe. A kapcsolati mátrixok egyrészt megadják minden szek-

tor esetében, hogy milyen más szektorokkal állnak kapcsolatban, másrészt a kapcsolati mátrixokat tartalmazó differenciálegyenlet-rendszer írja le a hálózat minden szektorának a dinamikus működését, azaz a szűkített hálózat működését.

## 3. A KIDOLGOZOTT JÁRMŰFORGALMI HÁLÓZATI MODELL VALIDÁLÁSA TÖBB TERÜLETEN IS MEGTÖRTÉNT

**Az első modell-validálás Budapesten történt,** (Peter, T. Fülep, T. and Bede, Zs., 2011) lámpás kereszteződéseknel aktuális lámpabeállítási adatok mellett és a helyszínen elvégzett forgalomszámlálási adatok alapján. A vizsgált útvonal, a különböző szimulációs időpontokban bejárásra került GPS készülékkel felszerelt gépjárművekkel valódi sebességprofil mérésekkel. A szimuláció során nyert sebesség-idő diagramok összehasonlításával a nagyszámú mérés, nemparaméteres statisztikai analízissel, ún. homogenitás vizsgálattal megállapítást nyert, hogy a sebességprofiloknál a mért és szimulációval kapott két-két mintahalmaz 95%-os szinten homogénnek tekinthető.

A modell validálása során, így megállapítható volt az alkalmazhatóságával kapcsolatban, hogy a modell lehetővé teszi olyan egyedi sebességfolyamatok kinyerését, amelyek a valósnak megfelelnek.

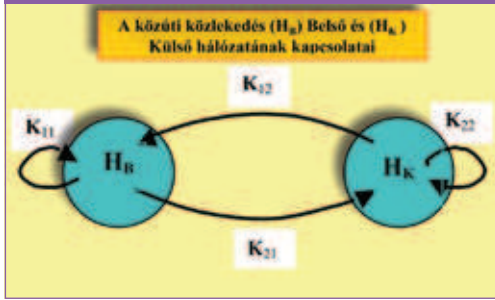
## Egy másik modell validálása Győr város-mag esetében, a következők szerint történt.

A modellünk az egyik legnagyobb forgalmat lebonyolító út, a Szent István út (1. sz. főút) és környéke területét foglalta magában. A hálózatot jellemző fő adatok: 228 db útszakasz, 9 db jelzőlámpával irányított csomópont, 38 db egyéb csomópont, 18 input szakasz és 15 output szakasz. A forgalmat irányító jelzőlámpák fázisterveit a Magyar Közút Zrt. Győri Igazgatósága és Győr város Önkormányzata bocsátotta a rendelkezésünkre. A modell adatoknál támaszkodtunk a város által 2012. évben elvégzett keresztmetszeti forgalommérésekre. A modellünk esetében, 63 db keresztmetszeti mérési adatot vettünk figyelembe a vizsgálatoknál és a validálásnál. A szimuláció

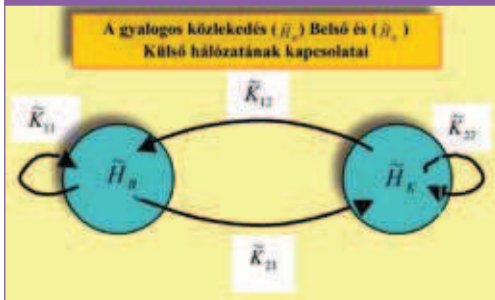
24 h-s időtartamra vonatkozó futtatási ideje 2 perc 14 másodperc. A validálást követően a mért és modell alapján számított, óránkénti keresztmetszeti forgalom közötti korrelációs együttható  $r_{xy}=0.9925$  értéket adott, amely a gyakorlatban már 100%-os korrelációnak tekinthető (Peter, T. Fazekas S., 2014).

## 4. A JÁRMŰFORGALOMI ÉS A GYALOGOS KÖZLEKEDÉS HÁLÓZATI MODELLEK UNIÓJA

1. ábra: Közúti közlekedés esetén, a belső és külső hálózatok kapcsolatai



2. ábra: Gyalogos közlekedés esetén, a belső és külső hálózatok kapcsolatai

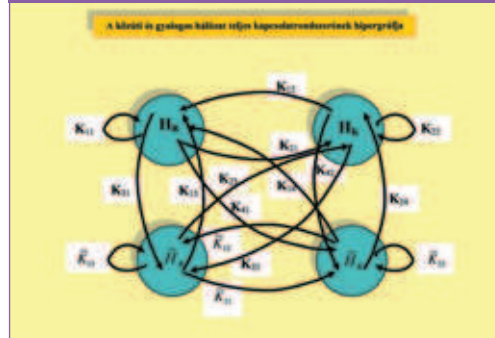


Az általunk kidolgozott és eddig alkalmazott közúti közlekedés forgalmi modell elsősorban a járműfolyamatokat vizsgálta. Ez a modell egy tetszőleges hálózati kiterjedéssel bíró makroszkopikus modell.

Bemutatjuk, hogy a modell megfelelő megfontolásokkal kiterjeszthető a gyalogos közlekedés hálózati modellezésére és a hálózaton közlekedő gyalogosok mozgásának, sebességfolyamatainak analízisére is.

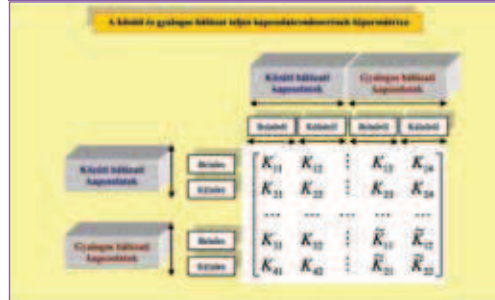
Mindenképpen kiemelendő, hogy, bár szerkezeti felépítésükben azonos a gyalogosforgalmi hálózati modell és a közúti közlekedés forgalmi modell, de önmagukban e két modell diszjunkt hálózatot alkotnak.

3. ábra: Közúti és gyalogos közlekedés hiperhálózati teljes kapcsolatrendszer



A járműforgalom és a gyalogos közlekedés hálózati modellek uniójának teljes kapcsolatrendszerét leíró kapcsolati hipermátrix:

4. ábra: Közúti és gyalogos közlekedés teljes kapcsolatrendszerét leíró hipermátrix



A két hálózat uniójánál, a matematikai modellezésnél az alábbi hipermátrixot alkalmazzuk a differenciálegyenlet-rendszerben:

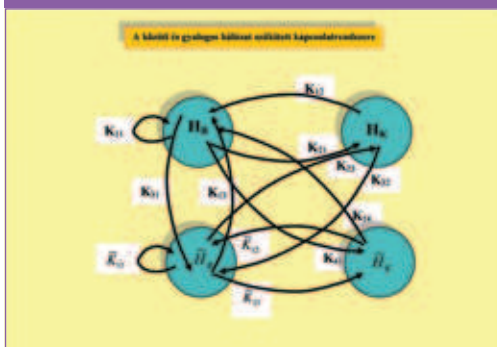
$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \vdots & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{23} & K_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{31} & K_{32} & \vdots & \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ K_{41} & K_{42} & \vdots & \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$



A modellezés során egy zárt tartományt vizsgálunk (ún. szűkített modellt alkalmazunk) és a peremeken megjelenő forgalmat mérési eredmények alapján vesszük figyelembe, ezért az összes külső-külső kapcsolatot, pl.  $K_{22}$ ,  $\tilde{K}_{22}$  nem kell vizsgálnunk.

A két modell egyesítése azt eredményezi, hogy a két hálózat egymással is szoros dinamikus kapcsolatokat alakít ki, és a meglévők kiegészülnek új kereszt belső-belső, külső-belső és belső-külső kapcsolatokkal.

5. ábra: Közúti és gyalogos közlekedés hiperhálózat szűkített kapcsolatrendszer



A járműforgalom és a gyalogos közlekedés hálózati modellek uniójának szűkített kapcsolatrendszerét leíró kapcsolati hipermátrix az alábbi:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \vdots & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & 0 & \vdots & K_{23} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{31} & K_{32} & \vdots & \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ K_{41} & 0 & \vdots & \tilde{K}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 4.1. Néhány megjegyzés, a hálózati modellek uniójával kapcsolatban

I. Matematikailag zárt az egyesítés művelete, mert ugyanazt a makroszkopikus megközelítést alkalmazzuk a gyalogos forgalomra, mint a közúti járműforgalomra. Mindkét dinamikus hálózat matematikai modellje a

**pozitív nemlineáris rendszer-osztályba tartozó Euler-modell.** (Ezt a rendszer-osztály tulajdonságot az új hálózat bármely részhálózatainak uniója is megőrzi.)

További általánosítás, hogy lehetséges a több, fizikailag különböző, de a fentiek szerint matematikailag azonos hálózati modell uniója is. Mivel ezek diszjunktak, elvégezhetjük az alaphálózatok bővítését praktikus sorozatszerűen is, és a mindenkor alaphálózatot a bővítettre cseréljük.

A modell konstrukciójának szerkezeti felépítése: az új kapcsolati hipermátrix fődiagonálisánál bal felső sarkában az alaphálózat és a jobb alsó sarkában a hozzáadott hálózatot reprezentáló szubmátrix helyezkedik el (mindkettő teljes belső-belső, input és output kapcsolataikkal). Az új kapcsolati hipermátrix mellék-diagonálisánál jobb felső sarkában, az új hálózatból az alaphálózat felé irányuló rászállítási kapcsolatok beírása történik. A bal alsó sarkában pedig, az alaphálózatból, az új hálózat felé irányuló rászállítási kapcsolatokat jelöljük.

Tehát, matematikailag/technikailag a bővítés mindig a mellék-diagonális kitöltését jelenti, amely a két hálózat között fellépő kapcsolatrendszer veszi figyelembe.

Azokat a változásokat, hogy a közúti modell jellemzői, milyen módosításokkal vihetők át ezekre az új hálózatrészekre, a kapcsolati mátrixok elemeinél kell megadni, ill., definiálni.

A közforgalmú közlekedési hálózattal kapcsolatos unió az autóbusz-trolibusz közlekedés esetén egyszerűbben kezelhető, mint a gyalogos hálózattal és a kerékpáros hálózattal kapcsolatos unió. Jól kezelhető a villamos, metró, hűv és a vasút makroszkopikus áramlásnak modellezése is, az anyagáram állomásonkénti, menetrend szerinti megállítással, a közlekedés jelzőlámpás irányításának módozatával. A modell validálását sebességfolyamatok, ill., eljutási idők vizsgálatával lehet elvégezni.

II. Ugyanakkor, az uniónak fontos sajátossága, hogy az **fizikailag két különböző hálózat dinamikus kapcsolata/kooperációja** útján jött létre.

Megállapíthatjuk továbbá, hogy az egyes hálózatok megőrzik a belső autonómításukat, ugyanakkor magas szintű kooperációban állnak egymással.

**III. A gyalogos forgalmi hálózatnak két fajta peremkapcsolata van,** egyrészt a **külső gyalogos hálózati** kapcsolatokból származó inputok és outputok, másrészt az unió által, a közúti hálózati elemkapcsolatokból származó inputok és outputok.

A modellezésnél alapvetően a közterületeken érdemes maradni. Az egyes gyalogos szakaszok inputjait praktikusán célszerű egyesíteni, pl. olyan esetekben, amikor ugyanarra a gyalogos szakaszra több különböző lakásból vagy a tartományon kívüli szakaszból lépnek gyalogosok, - mivel azok együtt növelik a továbbiakban az adott gyalogos szakasz sűrűségét.

**IV. A közúti hálózat input, output kapcsolatai nem változnak az unió által,** azok változatlanul járműforgalmi áramlatot kapnak és adnak át. **A járműforgalmi hálózatnál viszont jelentősen befolyásolhatja az időkésedelmet** a gyalogos sűrűség  $\tilde{x}$  állapotjellemző vektora, amely a gyalogos átkelőhelyeknél, továbbá a közösségi járműveknél a le- és felszállóhelyeknél eltöltött időtartamoknál jelentkezik, és amelyeket a  $\beta_j(\tilde{x})$  gyalogos állapotfüggő akadályozó tényezők vesznek figyelembe a modellben. Az egyes túlterhelési esetekben a járművek megváltozott gyorsítási képességei miatt fellépő sebességsökkenések a sebesség-sűrűség törvényénél lépnek fel, az ott szintén megjelenő gyalogos állapotjellemző vektor figyelembevételével  $V(\tilde{x}, \tilde{x}^-, \tilde{e})$ .

A járműforgalmi modellbe beépül a szakaszok közötti átadás akadályozása. Bármely két szakasz közötti átadásnál figyelembe veendő, hogy ott nincs kijelölt gyalogátkelőhely, kijelölt gyalogátkelőhely van jelzőlámpás irányítás nélkül, ill., kijelölt gyalogátkelőhely jelzőlámpás irányítással működik (Földes, D. and Csiszár, Cs., 2015).

A megállóhelyi időtartamok több tényezőtől is függenek, pl. a menetrend, az utasszám nagysága markánsan hat (Sándor, Zs. and Csiszár,

Cs., 2013). A modellezésnél meg kell különböztetni, a közforgalmú közlekedési hálózat modellezését és a dedikált úthálózaton közlekedő autóbusz-trolibusz közlekedés modellezését, de ezek együtt jól kezelhetők. Ez utóbbiaknál, az utasforgalmat is figyelembe vevő sebesség-sűrűség függvényeket és a menetrendet is figyelembe vevő lámpaprogramokat kell alkalmazni. Anyagáram és sebességfolyamat analízisének tudjuk kezelni, a villamos, metró, hév és a vasút makroszkopikus áramlásnak modellezését is, ahol már döntően a lámpa programok beállítását kell megfelelően alkalmazni.

**V. Mindkét hálózat közös tulajdonsága, hogy minden elágazásnál (állapot és időtől függő) anyagáram disztribúció jön létre.** Ez a tulajdonság kamerával rögzíthető és mérhető. **A makroszkopikus modellezésnél a disztribúciókon keresztül érvényesülnek az utazók személyes elvárásai és preferenciái is!**

A járműforgalmi modellünkben tehát szabadon dönthetünk, ill. választhatunk, hogy benne van-e az autóbusz-trolibusz tömegközlekedés modellezése is, ill. ezeket autonóm (saját pályákon közlekedő) hálózatként kezeljük, vesszük figyelembe. Befolyásolja a paramétereket, ha kijelölt autóbusszávon is vannak a hálózaton. A kötöttpályás felszíni és szint alatti tömegközlekedési formák modellezése viszont autonóm hálózatokon történik. Tehát, ezek is az unió művelettel csatlakozhatók az eredeti hálózatokhoz. Az utasforgalmi létesítmények szerepénél először azokat a jellemzőket célszerű kiemelni, amelyek a makromodellezés szempontjából azonosak, pl. csatlakozási pontok "kapuk" a járműforgalmi, ill. a közösségi közlekedési rendszerre történő be- és kilépésnél. Ezek tényleges „anyagmennyiség változást” csak a gyalogos hálózaton idéznek elő, a járműforgalmi hálózatot csupán befolyásolják. A specialitásokat az átadásoknál és befolyásolási módokatoknál lehet figyelembe venni. A mozgólépcsőket, mozgójárdákat, lifteket, stb. viszont célszerű bent tartani a gyalogosforgalmi hálózatban. Ezeken egy jól definiált sebességgel és kapacitáskorlátozással, ugyanúgy haladnak a gyalogosok, mint a járdán.

A további kutatásoknál – a kapcsolattípusok matematikai leírására – a jármű-utas átadás-

ra az előbb említett kapcsolati mátrixban, az egyes esetekre mintapéldákat célszerű elkészíteni és ezeket tovább lehet elemezni.

Gyakorlati szempontból a disztribúció jelentése az, hogy egy pontból tetszőleges, „n” számú elágazás esetén, adott „t” időpillanatban mekkora annak a valószínűsége, hogy valaki valamely  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) irányban halad tovább? A makroszkopikus modell esetében, ezzel lehet megadni, hogy „t” időpontban az egyes irányokba mekkora a várható anyagátadás mennyisége. A kamerás megfigyeléssel a hálózati gráf tetszőleges csúcspontjában, 24 h-ban folyamatosan detektálható a disztribúció, és a modellezésnél ezekre tudunk támaszkodni, figyelembe véve a napi, napszaki, szezonális utazási szokások változását is. A gyalogos forgalom disztribúciója elsősorban a „t” időtől függ, de a járműforgalom is meghatározó lehet, ezért az  $\mathbf{x}$  járműsűrűség állapotól is függhet:  $\alpha_{ij}(t, \mathbf{x})$ , kisebb mértékben és általában extrém tömegközlekedési helyzetekben az  $\mathbf{x}$  gyalogos sűrűség állapotjellemzőtől is függhet még:  $\alpha_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ .

## VI. Egy másik/kedvezőbb közlekedésirányítás, pl. ugyanazon napszakban megváltoztathatja a disztribúciókat is.

Nagyon fontos és érdekes kérdés az, hogyan definiáljuk az optimális közlekedésirányítást? Az utazó szempontjából az az optimális közlekedésirányítás, amely a legrövidebb idő alatt, vagy adott időtartamon belül a legkedvezőbb költség mellett juttatja őt célba. Természetesen lehetnek még kényelmi igények is, pl. minimális átszállás, vagy adott pontok, ill. területek érintésének igénye. Ebben a formában ez egy multikritériumos optimális irányítási probléma, amely esetünkben a diszjunkt hálózati felépítés miatt jól particionálható. A komplex hálózat tervezést és irányítását kell ennek megfelelően megtervezni úgy, hogy az utazó, a maximális kooperációban legyen érdekelt! (Természetesen dönthet másként, de jusson el hozzá az információ is, hogy ezzel mit veszít. Ez viszont már átnyúlik a mikroszkopikus irányítás körébe.)

Tehát, nagyon érdekes kérdés, hogy hogyan definiáljuk a közlekedésirányítást. Lényeg, az

is, hogy az utazók mennyire tartják be a szabályokat, azaz mennyire sikerül az irányítási célok elérése. (Az **Utazó** gyűjtőfogalom; lehet az egyéni gépjárművezető, kerékpáros, közforgalmú közlekedési utas, gyalogos stb.; továbbá, egy személy ezeket a „szerepköröket” változtathatja is egy helyváltoztatási láncban.) A klasszikus „hard” közlekedésirányítás mellett (amikor az utazók döntő többségében betartják a szabályokat) bevezethető az ún. „soft” irányítás is (angolul kifejezőbb a guidance szó), ekkor inkább befolyásolásnak tekinthető a tájékoztatás, ugyanis vagy elfogadja az utazó az iránymutatást, vagy nem (az elfogadási ráta vizsgálata is messzire vezet).

## VII. A szakaszelemek közötti anyagátadási folyamatokat szaggatják a közúti lámpák és akadályozzák/segítik állapotfüggő átadási tényezők, az átadási sebességeket befolyásolják az állapot és környezetfüggő tényezők.

A járműsűrűségnél a szakaszokra és parkolókra kidolgozott egzakt térbeli lefedettség fogalmat alkalmazhatjuk a gyalogosforgalomnál is, viszont a gyalogossűrűség ezen a területen egy új vizsgálat lesz! Valószínű, hogy a sűrűség számításánál a gyalogosszám mellett figyelembe kell venni a gyalogos sebességét (a lassú haladás kisebb foglaltsággal jár, mint a sietés vagy futás) és a járdák kapacitásánál a párhuzamos haladást, a szembehaladásnál fellépő foglaltságot és kapacitás értékeket. (Ezt később szintén érdemes vizsgálat tárgyává tenni.)

Tudomásunk szerint nincs az irodalomban a gyalogos mozgásokra felállított sebesség-sűrűség törvény. Mivel, a makroszkopikus megközelítés lényege a diszkrét elemekből összetevődő „anyagáramlás” vizsgálata a járműfolyamatoknál, semmi nem mond annak ellent, hogy kiterjesszük a sebesség-sűrűség törvényt a gyalogosforgalmi esetre is, figyelembe véve ennek a fizikai folyamatnak a sajátosságait! Az biztos, hogy szélső esetekben ugyanaz a törvény ebben az esetben is. Ha nincs a járdán gyalogos, akkor maximális gyalogos sebességgel lehet közlekedni rajta, ha teljesen bedugul a járda, akkor állnak, vagy nagyon kis sebességgel mennek előre a gyalogosok. A modellezésnél a sztochasztikus kapcsolatra regresszió-analízist szükséges elvégezni, és a mérésekkel összevetve validálni kell

a modellt. A  $V$  gyalogos sebességnél két változót mindenképpen szükséges figyelembe venni, az  $\tilde{x}$  gyalogos sűrűség állapotjellemzőt és az  $e$  környezeti paraméter vektort (eső, jeges, rossz, meredek, járda, stb.),  $V_{ij}(\tilde{x}, e)$ .

**VIII. A "rendszerirányítást" az "utazói befo-lyásolás" vonatkozásában két hálózat unióján történő áthaladások (sebesség/idő, v. költség, v. környezetterhelés) optimalizálásával lehet vizsgálni.** A gyalogosoknak a hálózaton kiválasztott pontpárok között történő áthaladás-analízise vegyes trajektóriákon „utazói áramlatokban gondolkodva” (gyalogos útszakaszok és közösségi járművek vegyes használatával) történik, a kiválasztott pontpárok meghatározására stratégiákat célszerű megadni.

*Az irányítási stratégiát, úgynevezett modell prediktív MPC alapú irányításként célszerű megfogalmazni a valós időnél nagyságrendekkel gyorsabb modellszámítás mellett, - amelyre képes a matematikai modellünk.*

Az utazás vegyes trajektóriákon történik (amelyen váltakoznak a gyalogos és járműves közlekedések). Minden trajektória elemi részei a szakaszok. Gyalogos szakaszon történő mozgást követhet gyalogos szakasz vagy járműves szakasz. Járműves szakaszon történő mozgást követhet járműves vagy gyalogos szakasz. Két járműves szakasz kapcsolódásakor a második szakaszon haladhat ugyanaz a jármű (ekkor nincs átszállás, marad a járművön a gyalogos), vagy haladhat másik jármű (ekkor van átszállás). Az egyes járműfajták közötti átszállás gyalogos szakaszon, ill. szakaszokon történő mozgás közbeiktatásával valósul meg. Az átszállási gyalogos szakaszok egészen rövidnek lehetnek (pl., ha ugyanazon megállóból/peronról történik a továbbutazás, vagy ha pl. a kerékpáros felszáll a kerékpárjával a hévbe). Bizonyos járműves mozgások közötti átszállások bár fizikailag lehetségesek, mégsem fordulnak elő a gyakorlatban (pl. saját kerékpárról átszállás közösségi kerékpárra). *Fentiek alapján az optimalizációs célnak legjobban az olyan integrált kritériumok felelnek meg, mint pl. a minimális utazási költség, a minimális energiafelhasználás, a legrövidebb utazási idő tervezése és ezek kombinációja.*

*A legrövidebb utazási idő tervezése esetében **első lépésként**, a hálózati unión, valamely meghatározott forgalomirányítás mellett törté-  
nik a modellezés. Az indulás tervezett időpil-  
lanatát figyelembe véve, a hálózat tetszőlegesen kiválasztott pontpárja esetén, a közöttük al-  
ternatívákat jelentő vegyes trajektóriákon, ki-  
számíthatók külön – külön az utazási idők. Az  
optimális trajektória ez alapján kiválasztható.  
(Ez ebben a formában még egy útvonalajánlás.)*

*A stratégia **második lépése** szerint a forgalomirá-  
nyítást optimaljuk oly módon, hogy az irányítás a  
legrövidebb utazási idők minimumát érje el.*

*Ez az optimális irányítás szekvenciális, adott  
időintervallumonként folyamatosan ismétlődik.*

*A stratégia **harmadik lépéseként** az irányítás  
tovább általánosítható oly módon, hogy meg-  
határozzuk a tartományban az utazók közleke-  
dési igényeit, figyelembe véve az aktuális célfor-  
galmi mátrixot, amely kifejezi a hálózat egyes  
régiói közötti forgalmakat.*

*Ekkor az optimális irányítás célja biztosítani  
a régiók közötti trajektóriákon a legrövidebb  
utazási idők összegének a minimumát. (A cél-  
függvénynél a legrövidebb utazási időket cél-  
szerű súlyozni az utas számokkal is, - a többség  
igényét jobban figyelembe véve.)*

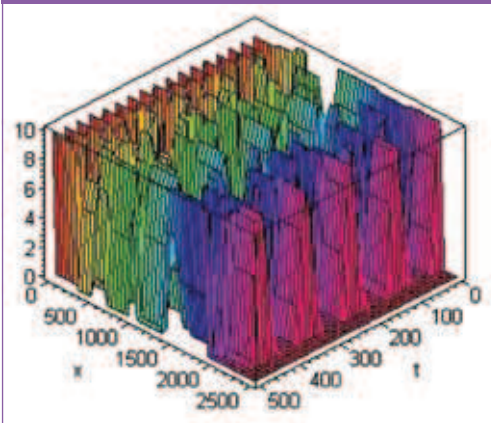
## 5. VEGYES TRAJEKTÓRIÁKON TÖR-TÉNŐ MOZGÁSOK EGYÜTTES SE-BESSÉGFOLYAMATAINAK ANALÍ-ZISE, OPTIMÁLIS UTAZÁSI IDŐK TERVEZÉSE

A hálózatok uniójának modelljéből közvetle-nül kinyerhetők a sebességfolyamatok az egye-sített hálózat tetszőleges trajektóriáin. Ekkor az egyesített hálózat egy tetszőleges „A” pont-jából  $t_0$  időpontban elindulunk a hálózat egy másik „B” pontjába egy megválasztott vegyes (pl. gyalogos és tömegközlekedési hálózati sza-kaszokat tartalmazó) trajektória mentén.

Ekkor, az állapotegyenlet által kiszámítható a kiegyenesített vegyes trajektória mentén az „X” trajektóriához és „t” időponthoz tartozó  $V(t, X)$  kétváltozós sebesség függvény 6. ábra.



6. ábra. egy kiegyenesített X trajektóriához és t időponthoz tartozó  $V(t, X)$  függvény



A keresett út-idő függvény a következő integrálegyenletet elégíti ki:

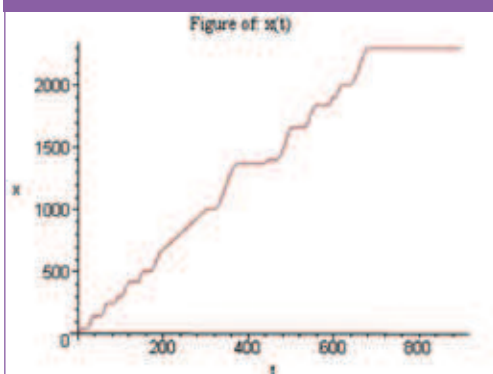
$$x(t) = \int_{t_0}^t (\tau, x(\tau)) d\tau \quad (5)$$

A számítás eredményét, a (6) elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlethez tartozó  $X(t_0) = x_0$  kezdeti érték probléma megoldása adja:

$$\frac{dX(t)}{dt} = V(t, X(t)) - V(t_0, X(t_0)) \quad (6)$$

A megoldás numerikus módszer alkalmazásával a rendelkezésünkre áll, pl. 7. ábra:

7. ábra: Út-idő diagram



A  $t_1$  célbaérési időponttól  $X(t)$  már nem növekszik, tehát pl. a célba érési idő  $T = t_1 - t_0$ .

Megjegyzés: Ha több trajektória esetén az optimális célba érést vizsgáljuk, a probléma egy variációs számítási feladat megoldását igényli (T. Peter, and M. Basset, 2009). Minden trajektória mentén, a „t” időpontig befutott „X” hosszúságú út egy  $X(t)$  útvonal-függvényt eredményez, amelyhez a „B”- pontba érkezéskor egy „T” eljutási idő tartozik és ez a leképítés szolgáltatja a J valós funkcionált:

$$J: X(t) \rightarrow T \quad (7)$$

A nagyméretű közlekedési hálózatokat leíró modell tehát alkalmazható valós idejű, a forgalom alakulását figyelembe vevő útvonalajánláshoz is.

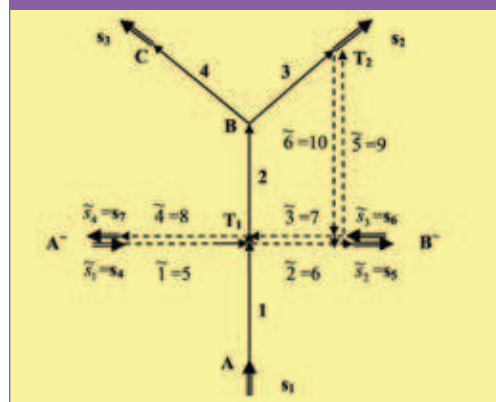
## 6. MINTAPÉLDA A JÁRMŰFORGALMI ÉS A GYALOGOS KÖZLEKEDÉS HÁLÓZATI MODELLEK UNIÓJÁRA

### 6.1. A mintamodel ismertetése (8. ábra)

A folytonos vonal a közúti hálózatot, a szaggatott vonal a gyalogos hálózatot jelöli. A mind-egyikhez kapcsolódó input és output kapcsolatokat a kettősvonalú nyíl jelöli.

A hullámos jellel jelölt szakaszszámozások, pontok és input-outputok, a gyalogos forgalomra vonatkoznak. A jel nélküli, normál szakaszszámozások, pontok és input-outputok a közúti forgalomra vonatkoznak. A  $T_1$  és  $T_2$  a gyalogos forgalom és a közúti forgalom közötti átszállók (transitok).

8. ábra: Egyszerű példa a közúti és gyalogos közlekedési hálózati kapcsolatrendszerre





A két hálózat kapcsolatát az alábbi jellemzi:

Közúti forgalom befolyásolását figyelhetjük meg:

Az 1 - 2 közötti közúti forgalmat akadályozza a kijelölt „zebrás” kereszteződésen áthaladó 2~ és 4~ gyalogos szakasz forgalma, amelyet a gyalogos sűrűséggel veszünk figyelembe.

A gyalogos forgalomnál fellépő disztribúciók:

3~ → 4~ re és 3~ → 2 re.

1~ → 2~ re és 1~ → 2 re.

6~ → 3~ ra és 6~ → s~2 re.

2~ → 5~ ra és 2~ → s~2 re.

s~3 → 5~ ra és s~3 → 3~ ra.

Közúti forgalomnál fellépő disztribúciók:

2 → 3 ra és 2 → 4 re.

3 → s2 re és 3 → 6~ ra.

## 6.2. A mintamodell computer-algebrai, matematikai modellje

A járműforgalom és a gyalogos közlekedés hálózat uniójának elemzése. Tekintsük át a már tárgyalt teljes kapcsolatrendszer leíró kapcsolati hipermátrixot (9. ábra).

A mintamodellnél az alábbi részmátrixok zérusmátrixok,

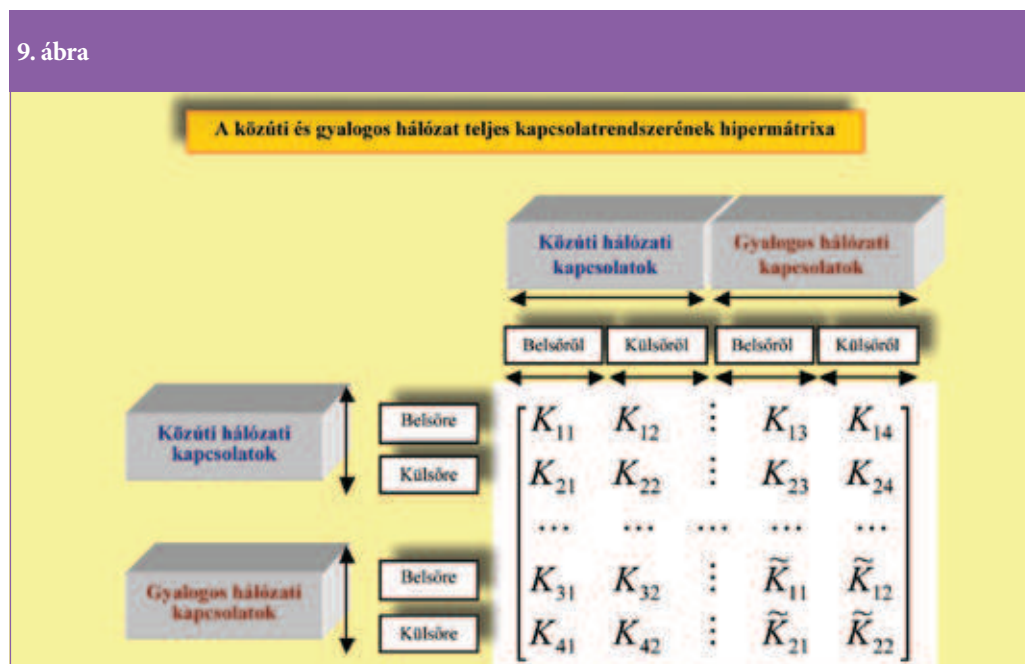
- mivel saját hálózatokon belül nincsenek külső-külső kapcsolatok:  $K_{22} = 0, \tilde{K}_{22} = 0$
- mivel nem indul kapcsolat külső gyalogos-hálózatról közúti hálózatra:  $K_{14} = 0, K_{24} = 0$
- mivel nem indul kapcsolat külső közúti hálózatról gyalogos hálózatra:  $K_{32} = 0, K_{42} = 0$
- mivel nem indul belső közúti hálózatról kapcsolat külső gyalogos hálózatra:  $K_{41} = 0$ .

Fentiek alapján, a kapcsolati hipermátrix alábbi részmátrixai írják le a hálózati unió kapcsolatrendszerét:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \vdots & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & \vdots & K_{23} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{31} & 0 & \vdots & \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ K_{41} & 0 & \vdots & \tilde{K}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A (2) differenciálegyenlet-rendszer alapján bemutatott szűkített hálózati modellt felhasználva, a részmátrixok konstrukcióját MAPLE MODELL elkészítésével végeztük el. Az alábbi összefüggésekben alkalmazott jelölések jelentése megtalálható a 2.2 és 2.3 alfejezetben, az univerzális járműforgalomi hálózat matematikai modelljének leírásánál.

9. ábra



A közúti hálózati modell leírásához az alábbi mátrixokat határoztuk meg:

$$K_{11}: \begin{bmatrix} -\beta_{2,1} S(x_2) V(x_2, x_1) E(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{2,1} S(x_2) V(x_2, x_1) E(x_1) & -\alpha_{3,2} S(x_3) V(x_3, x_2) E(x_2) - (1 - \alpha_{3,2}) S(x_4) V(x_4, x_2) E(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{3,2} S(x_3) V(x_3, x_2) E(x_2) & -\beta_{outR,2,3} S(x_2) V(x_2, x_3) E(x_3) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha_{3,2}) S(x_4) V(x_4, x_2) E(x_2) & 0 & -S(x_3) V(x_3, x_4) E(x_4) \end{bmatrix}$$

A minta modellnél, a gyalogosok közötti forgalmat lassító befolyásolása a  $T_1$  pontnál található gyalog-átkelőhelynél jelentkezik a modellben, a gyalogos sűrűséget figyelembe vevő  $\beta_{2,1}(x_2, x_4)$  függvény által.

$$K_{12}: \begin{bmatrix} \beta_{inp,1,1} S(x_1) V(x_1, s_1) E(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A gyalogos hálózati forgalmi modell leírásához a következő mátrixokat használtuk:

$$\tilde{K}_{11}: \begin{bmatrix} -\beta_{2,1} S(x_2) V(x_2, x_1) E(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{2,1} S(x_2) V(x_2, x_1) E(x_1) & -\alpha_{3,2} S(x_3) V(x_3, x_2) E(x_2) - \alpha_{outR,2,3} S(x_2) V(x_2, x_3) E(x_3) & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2,6} S(x_2) V(x_2, x_6) E(x_6) \\ 0 & 0 & -\alpha_{4,3} S(x_4) V(x_4, x_3) E(x_3) & 0 & 0 & (1 - \alpha_{2,6}) S(x_2) V(x_2, x_6) E(x_6) \\ 0 & 0 & \alpha_{4,3} S(x_4) V(x_4, x_3) E(x_3) & -S(x_4) V(x_4, x_6) E(x_6) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{5,2} S(x_5) V(x_5, x_2) E(x_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{2,6} S(x_2) V(x_2, x_6) E(x_6) - (1 - \alpha_{2,6}) S(x_2) V(x_2, x_6) E(x_6) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{12}: \begin{bmatrix} S(x_1) V(x_1, s_1) E(s_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{inp,3,3} S(x_3) V(x_3, s_3) E(s_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha_{inp,3,3}) S(x_5) V(x_5, s_3) E(s_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A gyalogos forgalomból járművekre átadásra kerülő mennyiségek, – pl.  $T_1$  ponton az 1~ és 3~ szakaszokról –, értelemszerűen csak a gyalogos forgalom sűrűségét csökkentik, viszont a járműsűrűséget nem növelik. Hasonlóan, a  $T_2$  ponton leszállók sem csökkentik a járműsűrűséget, de a gyalogos sűrűséget növelik a 6~ szakaszon. Az 5~ szakasz esetében azt látjuk, hogy erről külső közúti hálózati szakaszra történik a gyalogos áramlás.

Ugyanakkor, a járműveken elhelyezkedő gyalogosok (ekkor 'átmenetileg' utasok) időszakisosan kikerülnek a gyalogos forgalomból, ily módon, helyzetük a közúti forgalomban található parkolók szerepével azonos. Annyiban speciális, hogy ők mozgó „parkolóhelyeken” tartózkodnak utazás közben.

A  $T_1$  ponton felszálló gyalogos forgalmat és hasonlóan, a  $T_2$  ponton le- és felszálló gyalogosforgalmat a menetrendhez igazodó és azt követő  $\gamma_i(t)$  intenzitás függvényekkel lehet szabályozni.

## 7. A PROBLÉMA ÁLTALÁNOSÍTÁSA

A probléma általánosítása a felszíni közlekedési hálózatok esetében „n” db különböző típusú diszjunkt közlekedési hálózati rendszer uniójának meghatározását jelenti. Ez egy olyan összeépített rendszermodell eredményez, amely a valóságban is meglévő kooperációkat veszi figyelembe. Az általános megközelítési mód már jól szemléltethető n=4 különböző típusú diszjunkt közlekedési hálózati problémán is.

Legyenek pl., az egyes hálózati típusok az alábbiak:

- $H_K$ : Közúti hálózat
- $H_G$ : Gyalogos hálózat
- $H_P$ : Kötőtpályás hálózat
- $H_B$ : Kerékpáros hálózat

Ez alapján, az eddig figyelembe vett közúti járműfolyamatok és a gyalogos folyamatok mellett figyelembe vesszük a kötőtpályás hálózati folyamatokat és a kerékpáros hálózatok folyamatait is.

A különböző diszjunkt közlekedési hálózati rendszerek uniójának képzésénél a gyakorlatban alkalmazott modelltípusoknál bonyolultabb eset (a többféle kapcsolatot megengedő eset) is fellép, mert ekkor mindegyik hálózati típushoz tartozik belső hálózat, (amelynek állapotjellemzőit vizsgáljuk) és külső hálózat is (amely ehhez az input és output folyamatokat generálja).

Az egyesített hálózat (az unió) kapcsolati hipermátrixa a fő diagonálisban (színezett mátrixok) a különböző rész hálózatok kapcsolati hipermátrixait tartalmazza.

A matematikai modell a fő diagonálison kívül „ $n^2 - n$ ” kapcsolati hipermátrixot is tartalmaz. Ekkor, elvben bármely hálózat belső hálózati eleme dolgozhat egy másik hálózat belső és külső hálózati elemére is. (pl. a 10. ábrán, a  $H_G$  Belső hálózat dolgozik  $H_P$  Külső hálózatra és  $H_B$  Belső hálózatra is. Hasonlóan, bármely hálózat külső hálózati eleme dolgozhat akár egyszerre is bármely másik hálózatok belső és

10. ábra: Az unió kapcsolati hipermátrixa, 4 különböző típusú diszjunkt közlekedési hálózat esetén

		$H_K$		$H_G$		$H_P$		$H_B$	
		Belső	Külső	Belső	Külső	Belső	Külső	Belső	Külső
$H_K$	Belső								
	Külső								
$H_G$	Belső								
	Külső								
$H_P$	Belső								
	Külső								
$H_B$	Belső								
	Külső								

külső hálózati elemeire is. pl. a 10. ábrán a  $H_B$ . Külső hálózat dolgozik  $H_G$  Belső hálózatra és  $H_P$  Belső hálózatra is.) Ezek a hipermátrix fő diagonálisán kívüli kapcsolatok.

A valóságban az egyes hálózati rendszerek fizikai tulajdonságai azok, amelyek elvben lehetővé teszik vagy kizárják a lehetséges keresztkapcsolatokat. A keresztkapcsolatokhoz fűződő tulajdonságokat mutatjuk be az alábbi, egyszerűbb szerkezetet jelentő négy különböző típusú globális diszjunkt közlekedési hálózat esetén (11. ábra).

A globális diszjunkt közlekedési hálózati rendszerek uniójának képzése az egyszerűbb eset, mert ekkor mindegyik hálózati típushoz csak belső hálózat tartozik (amelynek állapotjellemzőit a teljes Föld felszínén vizsgáljuk) és a külső hálózatok üres hálózatok.

## A kapcsolati hipermátrix részmátrixaihoz fűződő tulajdonságok:

$K_{K,G}$ : gyalogos forgalomból átad utast a közúti forgalomba, de a közúti forgalom járműsűrűségét ez nem növeli meg,

$K_{G,K}$ : a közúti forgalomból átad utast a gyalogos forgalomba, de a közúti forgalom járműsűrűségét ez nem csökkenti le,

$K_{P,G}$ : gyalogos forgalomból átad utast a kötött pályás forgalomba, de a kötött pályás forgalom járműsűrűségét ez nem növeli meg,

$K_{G,P}$ : a kötött pályás forgalomból átad utast a gyalogos forgalomba, de a kötött pályás forgalom járműsűrűségét ez nem csökkenti le,

0: a kötött pályás forgalom nem ad át járművet a közúti forgalomba,

$K_{P,K}$ : a közúti forgalom átadhat járművet a kötött pályás forgalomba, de a kötött pályás forga-

lom járműsűrűségét ez nem növeli (pl. vasúton közúti járműszállítás történik),

0: a közúti forgalom nem ad át járművet a kerékpáros forgalomba,

$K_{K,B}$ : a kerékpáros forgalom átadhat járművet a közúti forgalomba. Két eset létezik: 1) effektíven részt vesz a forgalomban és növeli a sűrűséget, 2) járműre rakják, és nem növeli a sűrűséget. A kerékpáros hálózati sűrűség mindkét esetben csökken,

$K_{B,G}$ : a gyalogos forgalomból átad utast a kerékpáros forgalomba. A gyalogos sűrűség csökken, a parkoló kerékpárok köréből növekszik a kerékpáros sűrűség,

$K_{G,B}$ : a kerékpáros forgalomból átad utast a gyalogos forgalomba. A parkoló kerékpárok sűrűsége növekszik, és a gyalogos forgalom sűrűsége is,

0: a kötött pályás forgalom nem ad át járművet a kerékpáros forgalomba,

$K_{P,B}$ : a kerékpáros forgalomból átadásra kerül jármű a kötött pályásra oly módon, hogy a kötött pályás sűrűsége nem növekszik meg (pl. vasúton kerékpárszállítás történik). A kerékpáros forgalom sűrűsége ezzel csökken.

## 8. KONKLÚZIÓ

A modellek unióját végrehajtva, bemutattunk egy új, saját fejlesztésű makroszkopikus matematikai modellt. A modell a matematikai kutatások terén is rendkívül új és modern területhez tartozik, mivel a nemlineáris pozitív rendszerosztályban helyezkedik el. A speciális hipermátrix struktúra definiálja a hálózati elemek kooperációját és a kapcsolatokat leíró differenciálegyenlet rendszert. Ezen modell kitűnő lehetőséget biztosít a Lyapunov függvény-

11. ábra: Az unió kapcsolati hipermátrixa, 4 különböző típusú globális diszjunkt közlekedési hálózat esetén

	$H_K$	$H_G$	$H_P$	$H_B$
$H_K$		$K_{K,G}$	0	$K_{K,B}$
$H_G$	$K_{G,K}$		$K_{G,P}$	$K_{G,B}$
$H_P$	$K_{P,K}$	$K_{P,G}$		$K_{P,B}$
$H_B$	0	$K_{B,G}$	0	

módszer alkalmazásaira a tartományszintű nemlineáris irányítások különböző területein is. Kiemelendők az alkalmazási lehetőségek a nagyváros tartományszintű irányításaira. Kiválóak a modell képességei a trajektória menti mozgások optimalizálására és a forgalomorientált környezeti szennyezések csökkentésére is. A modell kifejezetten alkalmas az átszállási/eszköztöltési folyamatok leírására, amely a helyváltoztatási láncok kritikus eleme.

A nagyméretű bonyolult közlekedési hálózaton lejártszódó folyamatok működésének feltárása és jobb megismerése elvezetett bennünket egy új elvű modellezéshez és flexibilis optimális irányítási módszerek bevezetéséhez. A hálózat különböző tartományain fellépő különböző állapotok alapján, rugalmasan változhat az irányítás célja is. A hálózati ITS egy olyan variábilis hálózat, amely működése során egyszerre értékeli a forgalomhoz tartozó közvetlen igények optimális kielégítését, pl. optimális célba érést, a környezetterhelést, a biztonságot és az energiatakarékos működést. A városi forgalmi modellek létrehozására irányuló projektek a toródásokat és a környezeti terhelések csökkentését egyaránt szolgálják (Lakatos I., 2007), (Lakatos I., Hajdu F., 2014).

A kutatásokhoz kapcsolódó további szoftverfejlesztés, eszközt kíván biztosítani a nagyméretű intelligens közúti hálózatok esetén a valós idejű ipari irányítási feladatok ellátására. Kiemelendő, hogy minden esetben, az okos város - smart city (Csiszár, Cs. and Földes, D., 2015) forgalmi rendszertervének elkészítése az elsődleges iránytű az ITS hálózat megvalósításához. Rendkívül pozitív a fellépő szinergia és az eredmények további hasznosításának lehetősége. Új, gyorsított vizsgálati módszerek születhetnek a trajektórák menti komplex mozgások (helyváltoztatási láncok), a környezetterhelés és a biztonság-analízisére.

## FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] Caccetta and Rumchev, (2000) A survey of reachability and controllability for positive linear systems,' Annals of Operations Research, vol. 98, pp 101-122, 2000.
- [2] Csiszár, Cs. and Földes, D. (2015) Analysis and Modelling Methods of Urban Integrated Information System of Transportation. Smart Cities Symposium, 24-25 June 2015. Prague, Czech Republic, pp. 1-10 DOI:10.1109/SCSP.2015.7181574, ISBN: 978-1-4673-6727-1
- [3] Farina, L. and Rinaldi, S. (2000) Positive Linear Systems Theory and Applications. John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Földes, D. and Csiszár, Cs. (2015) Route Plan Evaluation Method for Personalized Passenger Information Service, Transport Volume 30 (3): 273-285 (Special Issue on Smart and Sustainable Transport) DOI: 10.3846/16484142.2015.1086889
- [5] Lakatos I. (2007) Effect of valve timing on exhaust emission, 8th International Conference on Heat Engines and Environmental Protection, BME, Department of Energy Engineering, (ISBN:978 963 420 907 2) Balatonfüred, 2007.05.28-30. pp. 207-214.
- [6] Lakatos I., Hajdu F. (2014) Examination of the effect of sensor properties on the secondary battery model in simulation environment ACTA TECHNICA JAURINENSIS (ISSN: 1789-6932) (eISSN: 2064-5228) 7: (1) pp. 71-86. (2014).
- [7] Luenberger (1979) Introduction to Dynamics Systems, Wiley, New York, 1979
- [8] Oussama Derbel, Tamás Péter, Hossni Zebiri, Benjamin Mourllion and Michel Basset (2012) Modified Intelligent Driver Model, Peridocia Polytechnica-Transportation Engineering 40/2 (2012) 53-60. doi: 10.3311/pp.tr.2012-2.02 web: <http://www.pp.bme.hu/> tr ISSN 1587-3811 (online version); ISSN 0303-7800 (paper version)
- [9] Oussama Derbel, Peter Tamas, Hossni Zebiri, Benjamin Mourllion and Michel Basset (2013) Modified Intelligent Driver Model for driver safety and traffic stability improvement, 7.IFAC Symposium Tokyo 2013 szept. 4-7.



- <http://www.sice.or.jp/IFAC-AAC2013/details.html> Organized by: International Federation of Automatic Control, Technical Committee on Automotive Control (IFAC-TC7.1) pp, 734-739 132-ik anyag. Doi: SaB2.3
- [10] Peter, T. and Basset, M. (2009) Application of new traffic models for determine optimal trajectories, pp. 89-94. Sessions 1 Automation and Mechatronics. (1-C-1 Sistem Modelling and Control). Oct.21-Oct.23, INTERNATIONAL FORUM ON STRATEGIC TECHNOLOGIES (IFOST 2009) HoChiMinh City University of Technology, Vietnam.
- [11] Peter, T. Fülep, T. and Bede, Zs. (2011) The application of a new principled optimal control for the dynamic change of the road network graph structure and the analysis of risk factors, 13th EAEC European Automotive Congress 13th-16th June 2011. Valencia – SPAIN Society of Automotive Engineers (STA), 2011. pp. 26-36. (ISBN:978-84-615-1794-7)
- [12] Péter, T. (2012) Modeling nonlinear road traffic networks for junction control, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science (AMCS), 2012, Vol. 22, No. 3. pp. 723-732. DOI: 10.2478/v1006-012-0054-1
- [13] Peter, T. Bokor, J. and Strobl, A (2013) Model for the analysis of traffic networks and traffic modelling of Győr, pp 167-172. Doi: 0023, IFAC Workshop on Advances in Control and Automation Theory for Transportation Applications (ACATTA 2013) which is to be held in Istanbul, Turkey, 16-17 September 2013. <http://www.acatta13.itu.edu.tr/>
- [14] Péter, T. and Fazekas, S. (2014) Determination of vehicle density of inputs and outputs and model validation for the analysis of network traffic processes. Periodica Polytechnica, Transportation Engineering Vol. 42.. No 1. 2014. pp. 53-61.
- [15] Sándor, Zs. and Csiszár, Cs. (2015) Role of Integrated Parking Information System in Traffic Management, Periodica Polytechnica Civil Engineering, Volume 59 (3): 327-336 DOI:10.3311/PPci.7361
- [16] Sándor, Zs. and Csiszár, Cs. (2013) Késési események elemzése helyi autóbusz közlekedésben, "Innováció és fenntartható felszíni közlekedés" konferencia, Budapest, 2013. augusztus 28-30. Paper 6
- [17] T. Vadvári and P. Várlaki (2015) Identification of Supply Chains Based on Input-Output Data Period. Polytech. Transp. Eng., Vol. 43, No. 3 (2015), pp. 162-167. DOI: 10.3311/PPtr.7931 Online published: 28-04-2015



## The combined modeling and complex analysis of the traffic flow of various surface transport networks

Based on our traffic network model development, further exact network mathematical models can be created based on a union of networks. The starting grid is a vehicle traffic network that, in our case, integrates the network of public transport as well. During the work process, first we establish the union of the road and pedestrian networks, which will be followed by the examination the possibility of generalization and the expansion of complex networks.



## Die kombinierte Modellierung und komplexe Analyse des Verkehrsflusses von verschiedenen Flächentransportnetzwerken

Auf der Basis von unseren Entwicklungen an Verkehrsnetzmodellen sowie einer exakten Netzvereinigung es kann ein weiteres exaktes mathematisches Netzwerkmodell erstellt werden. Das Ausgangsnetz ist ein Fahrzeugverkehrsnetz, das in unserem Fall auch das Netz des öffentlichen Verkehrs integriert. Während des Arbeitsprozesses erstellen wir zunächst die Vereinigung des Straßen- und Fußgängeretzes, es folgt danach die Untersuchung der Erweiterung von komplexen Netzwerken und die Möglichkeiten der Verallgemeinerung.